E mërkurë, 10 Maj, 2023

Problemi 1. Gjeni të gjithë funksionet $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ të tillë që për çdo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x)).$$

Problemi 2. Rrethi i brendashkruar trekëndëshit ABC, takon brinjët BC, CA, AB në D, E, F respektivisht. Supozohet se gjendet një pikë X në drejtëzën EF e tillë që

$$\angle XBC = \angle XCB = 45^\circ.$$

Le të jetë M pika e mesit të harkut BC të rrethit që i jashtëshkruhet trekëndëshit ABC dhe që nuk përmban pikën A. Vërtetoni se drejtëza MD kalon në pikën E ose F.

Problemi 3. Për çdo numër të plotë pozitiv n, shënohet me $\omega(n)$ numri i pjestuesve të thjeshtë të ndryshëm të n (për shembull, $\omega(1) = 0$ dhe $\omega(12) = 2$). Gjeni të gjithë polinomet $P(x)$ me koeficientë numra të plotë, të tillë që kur n është një numër i plotë pozitiv i cili kënaq kushtin $\omega(n) > 2023^{2023}$, atëherë $P(n)$ është gjithashtu një numër i plotë pozitiv ku

$$\omega(n) \geq \omega(P(n)).$$

Problemi 4. Gjeni numrin e plotë më të madh $k \leq 2023$ për të cilin vlen vetia e mëposhtme: kurdo që Alice ngjyros me të kuq ekzaktësisht k numra nga bashkësia $\{1, 2, \dots, 2023\}$, Bob mund të ngjyrosë me blu disa nga numrat e pangjyrosur ende, në mënyrë të tillë që shuma e numrave të ngjyrosur me të kuq është e njëjtë me shumën e numrave të ngjyrosur me blu.

Koha e lejuar ëhstë 4 orë dhe 30 minuta
Secili problem vlen 10 pikë