

Language: Arabic-Saudi

Wednesday, May 10, 2023

السؤال الأول: أوجد كل الدوال $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث لكل $x, y \in \mathbb{R}$ فإن:

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x))$$

السؤال الثاني: الدائرة الداخلية في المثلث ABC تمس أضلاعه BC, CA, AB في D, E, F تواليًا. افترض أنه يوجد نقطة X على المستقيم EF بحيث

$$\angle XBC = \angle XCB = 45^\circ$$

لتكن M هي منتصف القوس BC الذي لا يحوي A في الدائرة المحيطة بالمثلث ABC . أثبت أن المستقيم MD يمر إما بـ E أو F .

السؤال الثالث: لكل عدد صحيح موجب n ، نعرف $\omega(n)$ بأنها عدد القواسم الأولية المختلفة للعدد n (على سبيل المثال $\omega(1) = 0, \omega(12) = 2$). أوجد كل كثيرات الحدود $P(x)$ التي معاملاتها أعداد صحيحة، بحيث طالما n عدد صحيح موجب يحقق $\omega(n) > 2023^{2023}$ ، فإن $P(n)$ أيضًا عدد صحيح موجب يحقق

$$\omega(n) \geq \omega(P(n))$$

السؤال الرابع: أوجد أكبر عدد صحيح $k \leq 2023$ الذي يحقق التالي: كلما لونت "أليس" بالضبط k عددًا من عناصر المجموعة $\{1, 2, \dots, 2023\}$ بالأحمر، فإنه يمكن لـ "بوب" تلوين بعض الأعداد الغير ملونة بالأزرق، بحيث يكون مجموع الأعداد الحمراء يساوي مجموع الأعداد الزرقاء.

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 10 points