Language: Bosnian

Srijeda, 10. maj 2023.

Zadatak 1. Odrediti sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x)).$$

Zadatak 2. U trouglu ABC upisana kružnica dodiruje stranice BC, CA, AB redom u D, E, F. Pretpostavimo da postoji tačka X na pravoj EF takva da je

$$\angle XBC = \angle XCB = 45^\circ.$$

Neka je M sredina luka BC opisane kružnice trougla ABC koji ne sadrži A. Dokazati da prava MD prolazi kroz E ili kroz F.

Zadatak 3. Za svaki pozitivan cio broj n sa $\omega(n)$ označavamo broj različitih prostih djelilaca od n (na primjer, $\omega(1) = 0$ i $\omega(12) = 2$). Odrediti sve polinome $P(x)$ sa cjelobrojnim koeficijentima takve da, kad god je n pozitivan cio broj koji zadovoljava $\omega(n) > 2023^{2023}$, tada je i $P(n)$ pozitivan cio broj za koji vrijedi

$$\omega(n) \geq \omega(P(n)).$$

Zadatak 4. Odrediti najveći cijeli broj $k \leq 2023$ za koji vrijedi sljedeća tvrdnja: na koji god način Asja oboji tačno k brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, 2023\}$ crvenom bojom, Benjamin može obojiti neke od neobojenih brojeva plavom bojom tako da je suma svih crvenih brojeva jednaka sumi svih plavih brojeva.

Vrijeme izrade je 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova