Language: Bulgarian

Сряда, 10 май, 2023

Задача 1. Да се намерят всички функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такива, че за всеки $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x)).$$

Задача 2. Вписаната в триъгълник ABC окръжност се допира до страните му BC,CA, AB съответно в точките D, E, F. Известно е, че съществува точка X върху правата EF такава, че

$$\angle XBC = \angle XCB = 45^\circ.$$

Нека M е средата на дъгата BC от описаната около триъгълник ABC окръжност, която не съдържа A. Да се докаже, че правата MD минава през E или F.

Задача 3. За произволно естествено число n, да означим с $\omega(n)$ броят на различните му прости делители (например, $\omega(1) = 0$ и $\omega(12) = 2$). Да се намерят всички полиноми $P(x)$ с цели коефициенти такива, че за всяко естесвено число n, изпълняващо условието $\omega(n) > 2023^{2023}$, числото $P(n)$ също е естествено и

$$\omega(n) \geq \omega(P(n)).$$

Задача 4. Да се намери най-голямото цяло число $k \leq 2023$, за което е изпълнено следното: както и Алис да оцвети в червено точно k числа от множеството $\{1, 2, \ldots, 2023\}$, Боб може да оцвети в синьо някои измежду останалите неоцветени числа от множеството така, че сумата на червените числа да е равна на сумата на сините числа.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява с 10 точки