Language: French

Mercredi 10 mai 2023

Problème 1. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x)).$$

Problème 2. Soit ABC un triangle, le cercle inscrit de ABC est tangent aux côtés BC, CA et AB en D, E et F respectivement. On suppose qu'il existe un point X sur la droite (EF) tel que

$$\angle XBC = \angle XCB = 45^\circ.$$

Soit M le milieu de l'arc BC ne contenant pas A sur le cercle circonscrit de ABC. Montrer que (MD) passe par E ou F.

Problème 3. Soit n un entier naturel non nul, on note $\omega(n)$ le nombre de nombres premiers distincts qui divisent n (par exemple, $\omega(1) = 0$ et $\omega(12) = 2$). Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers, tel que pour tous les entiers strictement positifs n satisfaisant $\omega(n) > 2023^{2023}$, alors $P(n)$ est aussi un entier strictement positif et on a

$$\omega(n) \geq \omega(P(n)).$$

Problème 4. Trouver le plus grand entier naturel $k \leq 2023$ pour lequel quelque soit la manière dont Alice colorie k nombres en rouge parmi $\{1, 2, \ldots, 2023\}$, Bob peut colorier un certain nombre du reste en bleu, de telle sorte que la somme des nombres en bleus soit la même que la somme des nombres en rouges.

Vous avez 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème sera noté sur 10 points.