Language: Greek

Τετάρτη, 10 Μαΐου, 2023

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει ότι

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x)).$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται τρίγωνο ABC, του οποίου ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στις πλευρές BC, CA, AB στα σημεία D, E, F αντίστοιχα. Δίνεται επιπλέον ότι υπάρχει σημείο X στην ευθεία EF τέτοιο, ώστε

$$\angle XBC = \angle XCB = 45^\circ.$$

Έστω M το μέσο του τόξου BC του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC το οποίο δεν περιέχει το σημείο A. Να αποδείξετε ότι η ευθεία MD διέρχεται από το σημείο E ή από το σημείο F.

Πρόβλημα 3. Για κάθε θετικό ακέραιο n, συμβολίζουμε με $\omega(n)$ το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων διαιρετών του n (για παράδειγμα, $\omega(1) = 0$ και $\omega(12) = 2$). Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές τέτοια, ώστε όταν ο n είναι θετικός ακέραιος με $\omega(n) > 2023^{2023}$, τότε ο $P(n)$ είναι επίσης θετικός ακέραιος με

$$\omega(n) \geq \omega(P(n)).$$

Πρόβλημα 4. Να προσδιορίσετε τον μέγιστο ακέραιο $k \leq 2023$ για τον οποίο ισχύει το εξής: Οποτεδήποτε η Αλίκη χρωματίσει κόκκινους, k ακριβώς αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, 2023\}$, ο Βασίλης μπορεί να χρωματίσει μπλε, κάποιους από τους υπόλοιπους αχρωμάτιστους αριθμούς έτσι, ώστε το άθροισμα όλων των κόκκινων αριθμών να είναι ίσο με το άθροισμα όλων των μπλε αριθμών.

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες