Language: Italian

Mercoledì 10 maggio 2023

Problema 1. Trovare tutte le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che si abbia

$$xf(x+f(y)) = (y-x)f(f(x))$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Nel triangolo ABC, la circonferenza inscritta tocca i lati BC, CA, AB in D, E, F rispettivamente. Supponiamo che esista un punto X sulla retta EF tale che

$$\angle XBC = \angle XCB = 45^\circ.$$

Sia M il punto medio dell'arco BC della circonferenza circoscritta ad ABC che non contiene A. Dimostrare che la retta MD passa per E o per F.

Problema 3. Per ogni intero positivo n, indichiamo con $\omega(n)$ il numero dei divisori primi distinti di n (per esempio, $\omega(1) = 0$ e $\omega(12) = 2$). Trovare tutti i polinomi a coefficienti interi $P(x)$ tali che, per ogni intero positivo n che soddisfa $\omega(n) > 2023^{2023}$, $P(n)$ è anch'esso un intero positivo con

$$\omega(n) \geq \omega(P(n)).$$

Problema 4. Trovare il più grande intero $k \leq 2023$ per cui vale la seguente proprietà: ogni volta che Alice colora esattamente k numeri dell'insieme $\{1, 2, \ldots, 2023\}$ in rosso, Bobo può colorare di blu alcuni dei rimanenti numeri non colorati, di modo che la somma di tutti i numeri rossi sia la stessa della somma di tutti i numeri blu.

La durata della prova è di 4 ore e 30 minuti.
Ogni problema vale 10 punti.