

Zadatak 1. Naći sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za svako $x, y \in \mathbb{R}$ važi

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x)).$$

Zadatak 2. Kružnica upisana u trougao ABC dodiruje stranice BC, CA, AB u tačkama D, E, F redom. Pretpostavimo da na pravoj EF postoji tačka X tako da je

$$\angle XBC = \angle XCB = 45^\circ.$$

Neka je M središnja tačka luka BC kružnice opisane oko trougla ABC koji ne sadrži tačku A . Dokazati da prava MD prolazi kroz E ili F .

Zadatak 3. Za svaki pozitivan cio broj n , označimo sa $\omega(n)$ broj različitih prostih djelioca broja n (na primjer, $\omega(1) = 0$ i $\omega(12) = 2$). Naći sve polinome $P(x)$ sa cjelobrojnim koeficijentima, takve da kad god je n pozitivan cio broj koji zadovoljava nejednakost $\omega(n) > 2023^{2023}$, tada je $P(n)$ takođe pozitivan cio broj i važi

$$\omega(n) \geq \omega(P(n)).$$

Zadatak 4. Naći najveći cio broj $k \leq 2023$ za koji važi: kada god Alisa oboji tačno k brojeva iz skupa $\{1, 2, \dots, 2023\}$ u crveno, Bob može neke od preostalih brojeva obojiti u plavo tako da suma crveno obojenih brojeva bude jednaka sumi plavo obojenih.