Language: Romanian

Miercuri, 10 mai, 2023

Problema 1. Determinaţi toate funcţiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x)).$$

Problema 2. Cercul înscris în triunghiul ABC atinge laturile BC, CA şi AB în punctele D, E şi respectiv F. Presupunem că există un punct X pe dreapta EF astfel încât

$$\angle XBC = \angle XCB = 45^\circ.$$

Fie M mijlocul arcului BC al cercului circumscris triunghiului ABC care nu conţine punctul A. Demonstraţi că dreapta MD trece prin E sau F.

Problema 3. Pentru orice număr natural nenul n, notăm cu $\omega(n)$ numărul divizorilor primi distincţi ai lui n (de exemplu, $\omega(1) = 0$ şi $\omega(12) = 2$). Determinaţi toate polinoamele $P(X)$ cu coeficienţi întregi, astfel încât, pentru orice număr natural nenul n, care satisface condiţia $\omega(n) > 2023^{2023}$, avem că $P(n)$ este, de asemenea, un număr natural nenul cu

$$\omega(n) \geq \omega(P(n)).$$

Problema 4. Determinaţi cel mai mare număr natural $k \leq 2023$ care are următoarea proprietate: oricum ar colora cu roşu Alice exact k numere din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 2023\}$, Bob poate colora cu albastru unele dintre numerele rămase necolorate, astfel încât suma numerelor roşii este egală cu suma numerelor albastre.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 minute

Fiecare problemă este notată cu maxim 10 puncte