Язык: Русский

Среда, 10 Мая 2023 года

Задача 1. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют равенству

$$xf\big(x + f(y)\big) = (y - x)f\big(f(x)\big)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 2. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Предположим, что существует точка X на прямой EF такая, что

$$\angle XBC = \angle XCB = 45^{\circ}.$$

Пусть точка M является серединой дуги BC на описанной окружности около ABC, не содержащей точку A. Докажите, что прямая MD проходит через точку E или F.

Задача 3. Для каждого положительного целого числа n, обозначим через $\omega(n)$ количество различных простых делителей n (например, $\omega(1) = 0$ и $\omega(12) = 2$). Найдите все многочлены $P(x)$ с целочисленными коэффициентами такие, что если n является положительным целым числом, удовлетворяющим неравенству $\omega(n) > 2023^{2023}$, то $P(n)$ также является положительным целым числом и верно неравенство

$$\omega(n) \geq \omega\big(P(n)\big).$$

Задача 4. Найдите наибольшее целое число $k \leq 2023$, для которого верно следующее свойство: как бы Алиса ни раскрасила ровно k чисел из множества $\{1, 2, \ldots, 2023\}$ в красный цвет, Боб сможет покрасить в синий цвет некоторые из оставшихся непокрашенных чисел таким образом, что сумма всех чисел, покрашенных в красный цвет, окажется равной сумме всех чисел, покрашенных в синий цвет.

Время: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов